

Durée : 4 heures

## Baccalauréat S Antilles–Guyane septembre 2006

### EXERCICE 1

6 points

On se propose de déterminer des valeurs approchées de l'intégrale  $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{10t^2}{1+t^2} dt$  en utilisant deux méthodes distinctes.

Les parties A et B sont largement indépendantes l'une de l'autre.

#### PARTIE A

##### Utilisation d'une intégration par parties

1. En remarquant que  $\frac{10t^2}{1+t^2} = 5t \times \frac{2t}{1+t^2}$ , établir l'égalité

$$I = \frac{5}{2} \times \ln\left(\frac{5}{4}\right) - 5 \int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1+t^2) dt.$$

2. On pose, pour  $x$  positif ou nul,  $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$  et  $g(x) = \ln(1+x) - x$ .
- En utilisant les variations de  $f$ , démontrer que  $f(x) \geq 0$ . En procédant de la même façon, on pourrait établir que  $g(x) \leq 0$ , inégalité que l'on admettra ici.
  - À l'aide de ce qui précède, montrer que l'encadrement :

$$t^2 - \frac{t^4}{2} \leq \ln(1+t^2) \leq t^2.$$

est vrai pour tout réel  $t$ .

- c. Dédurre de la question précédente que

$$\frac{5}{24} \leq -5 \int_0^{\frac{1}{2}} \ln(1+t^2) dt \leq -\frac{37}{192}.$$

3. En utilisant les questions précédentes, donner un encadrement d'amplitude inférieure à 0,02 de  $I$  par des nombres décimaux ayant trois chiffres après la virgule.

#### PARTIE B

##### Utilisation de la méthode d'Euler

1. On pose  $\varphi(x) = \int_0^x \frac{10t^2}{1+t^2} dt$  pour  $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ . Préciser  $\varphi(0)$  ainsi que la fonction dérivée de  $\varphi$ .
2. On rappelle que la méthode d'Euler permet de construire une suite de points  $M_n(x_n; y_n)$  proches de la courbe représentative de  $\varphi$ . En choisissant comme pas  $h = 0,1$ , on obtient la suite de points  $M_n$  définie pour  $n$  entier naturel par :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_{n+1} = x_n + 0,1 \\ y_{n+1} = y_n - n + \varphi'(x_n) \times 0,1 \end{cases}$$

En utilisant, sans la justifier, l'égalité  $x_n = \frac{n}{10}$  vérifier que  $y_{n+1} = y_n + \frac{n^2}{100+n^2}$ .

3. Calculer  $y_1$ , et  $y_2$ , puis exprimer  $y_3, y_4$  et  $y_5$  sous la forme d'une somme de fractions que l'on ne cherchera pas à simplifier.  
Donner maintenant une valeur approchée à 0,001 près de  $y_5$ .  
Le réel  $x_5$  étant égal à  $\frac{1}{2}$ ,  $y_5$  est donc une valeur approchée de  $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$  c'est-à-dire de I.
4. Avec la méthode d'Euler au pas  $h = 0,01$ , on obtient, pour I, la valeur approchée 0,354.  
Les valeurs de I obtenues avec la méthode d'Euler sont-elles compatibles avec l'encadrement de la question 3. de la partie A ?

## EXERCICE 2

5 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On désigne par A et B les points, d'affixes respectives 2 et 3. On fera un dessin (unité graphique 2 cm) qui sera complété selon indications de l'énoncé.

La question 1 est indépendante des questions 2 et 3.

1. a. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation

$$z^2 - 4z + 6 = 0.$$

- b. On désigne par  $M_1$  et  $M_2$  les points d'affixes respectives

$$z_1 = 2 + i\sqrt{2} \text{ et } z_2 = -2 - i\sqrt{2}.$$

Déterminer la forme algébrique du nombre complexe  $\frac{z_1 - 3}{z_1}$ .  
En déduire que le triangle  $O B M_1$  est un triangle rectangle.

- c. Démontrer sans nouveau calcul que les points O, B,  $M_1$  et  $M_2$ , appartiennent à un même cercle  $\mathcal{C}$  que l'on précisera.  
Tracer le cercle  $\mathcal{C}$  et placer les points  $M_1$  et  $M_2$  sur le dessin.
2. On appelle  $f$  l'application du plan qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  définie par l'égalité  $z' = z^2 - 4z + 6$ .  
On désigne par  $\Gamma$  le cercle de centre A et de rayon  $\sqrt{2}$ .  
Ce cercle ne sera pas tracé sur le dessin,
- a. Vérifier l'égalité suivante  $z' - 2 = (z - 2)^2$ .
- b. Soit  $M$  le point de  $\Gamma$  d'affixe  $z = 2 + \sqrt{2}e^{i\theta}$  où  $\theta$  désigne un réel de l'intervalle  $]-\pi; \pi]$ . Vérifier l'égalité suivante :  $z' = 2 + 2e^{2i\theta}$  et en déduire que  $M'$  est situé sur un cercle  $\Gamma'$  dont on précisera le centre et le rayon. Tracer  $\Gamma'$  sur le dessin,
3. On appelle D le point d'affixe  $d = 2 + \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{6}}{2}$  et on désigne par  $D'$  l'image de D par  $f$ .
- a. Écrire sous forme exponentielle le nombre complexe  $d - 2$ .  
En déduire que D est situé sur le cercle  $\Gamma$ .
- b. À l'aide la question 2 b, donner une mesure de l'angle  $(\vec{u}, \overrightarrow{AD'})$  et placer le point  $D'$  sur le dessin.
- c. Démontrer que le triangle  $DAD'$  est équilatéral.

## EXERCICE 3

2 points

**Partie A**

On suppose connu le résultat suivant :

Si  $X$  est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre strictement positif  $\lambda$  alors, pour  $t$  réel positif,  $p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$ .

- Démontrer l'égalité suivante :  $p(X > t) = e^{-\lambda t}$ .
- En déduire que, pour  $s$  et  $t$  réels positifs, l'égalité suivante est vraie  $P_{(X>t)}(X > s + t) = p(X > s)$  (loi de durée de vie sans vieillissement),  $P_{(X>t)}(X > s + t)$  désignant la probabilité de l'évènement  $(X > s + t)$  sachant que  $(X > t)$  est réalisé.

**Partie B**

La durée d'attente exprimée en minutes à chaque caisse d'un supermarché peut être modélisée par une variable aléatoire  $T$  qui suit une loi exponentielle de paramètre strictement positif  $\lambda$ .

1. a. Déterminer une expression exacte de  $\lambda$  sachant que  $p(T \leq 10) = 0,7$ .  
On prendra, pour la suite de l'exercice, la valeur 0,12 comme valeur approchée de  $\lambda$ .
- b. Donner une expression exacte de la probabilité conditionnelle  $P_{(T>10)}(T > 15)$ .
- c. Sachant qu'un client a déjà attendu 10 minutes à une caisse, déterminer la probabilité que son attente totale ne dépasse pas 15 minutes.  
On donnera une expression exacte, puis une valeur approchée à 0,01 près de la réponse.

On suppose que la durée d'attente à une caisse de ce supermarché est indépendante de celle des autres caisses. Actuellement, 6 caisses sont ouvertes. On désigne par  $Y$  la variable aléatoire qui représente le nombre de caisses pour lesquelles la durée d'attente est supérieure à 10 minutes.

- a. Donner la nature et les paramètres caractéristiques de  $Y$ .
- b. Le gérant du supermarché ouvre des caisses supplémentaires si la durée d'attente à au moins 4 des 6 caisses est supérieure à 10 minutes.  
Déterminer à 0,01 près la probabilité d'ouverture de nouvelles caisses.

## EXERCICE 4

5 points

Dans un cube ABCDEFGH, on désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [GH]. K désigne le centre de la face BCGE. Les calculs seront effectués dans le repère orthonormal  $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ .

1. a. Démontrer que le quadrilatère DIFJ est un parallélogramme.

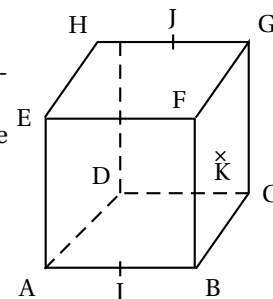
Établir que DIFJ est en fait un losange et montrer que

l'aire de ce losange est égale à  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ .

- b. Vérifier que le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  est un vecteur normal au plan (DIJ).

En déduire une équation cartésienne de ce plan.

- c. Déterminer la distance du point E au plan (DIJ), puis calculer le volume



de la pyramide EDIFJ. On rappelle que le volume  $V$  d'une pyramide de hauteur  $h$  et de base correspondante  $\mathcal{B}$  est donné par la formule suivante  $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ .

2. Soit  $(\Delta)$  la droite passant par E et orthogonale au plan (DIJ)
  - a. Donner une représentation paramétrique de  $(\Delta)$  et prouver que K est un point de  $(\Delta)$ .
  - b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection L de  $(\Delta)$  et du plan (DIJ).
  - c. Vérifier que L est le centre de gravité du triangle BEG.
3. Soit (S) l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient l'équation  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y - x + \frac{4}{3} = 0$ .
  - a. Vérifier que (S) est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.
  - b. Montrer que L est un point de (S). Quelle propriété géométrique relative à (S) et au plan (DIJ) peut-on déduire de ce dernier résultat ?

## EXERCICE 4

5 points

**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On désigne par A et C les points d'affixes respectives 1 et  $2i$ .

Sur le dessin joint en annexe (à rendre avec la copie), le quadrilatère OABC est un rectangle et I désigne le milieu de [AB].

1.
  - a. Justifier le fait qu'il existe une unique similitude directe  $s$  qui transforme O en I et A en C.
  - b. Déterminer l'écriture complexe de  $s$ . En déduire les éléments caractéristiques de  $s$  et, en particulier, établir que l'affixe du centre  $\Omega$  de  $s$  vaut  $\frac{1+3i}{5}$ .
  - c. Vérifier par un calcul que  $\Omega$  est situé sur le cercle  $\Gamma$  de centre A passant par O.
2. Soit  $f$  l'application du plan complexe d'écriture complexe

$$z \mapsto \frac{-3-4i}{5}z + \frac{8+4i}{5}.$$

- a. Déterminer les images par  $f$  des points A et C. En déduire la nature précise de  $f$ , puis démontrer que I est l'image de  $\Omega$  par la symétrie orthogonale d'axe (AC).
  - b. Construire le cercle  $\Gamma$  sur le dessin et placer également le point  $\Omega$  en utilisant les informations géométriques précédentes.
3. À tout point  $M$  d'image  $M'$  par  $s$ , on associe le point  $M''$  défini par l'égalité vectorielle  $\overrightarrow{M'M''} = \overrightarrow{\Omega M}$ .
  - a. Quel est le point  $\Omega''$  associé à  $\Omega$  ?
  - b. Construire avec soin le point  $A''$  en laissant les traits de construction.
  - c. On suppose maintenant que  $M$  a pour affixe  $z$ .  
Démontrer que  $M''$  a pour affixe  $z'' = iz + \frac{4+2i}{5}$ .  
En déduire que  $M''$  est l'image de  $M$  par une similitude dont on donnera les éléments caractéristiques.
  - d. Déterminer et représenter sur le dessin l'ensemble  $\Gamma''$  des points  $M''$  lorsque  $M$  décrit le cercle  $\Gamma$ .

## Annexe (exercice de spécialité)

