

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S Amérique du Sud novembre 2006 ∞

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

1. a. Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{ax}$ est solution de l'équation $y' = ay$.
 f est une fonction dérivable et $f'(x) = ae^{ax} = af(x)$.
 f est donc solution de l'équation $y' = ay$
- b. Si g est une solution de l'équation $y' = ay$, alors $g'(x) = ag(x)$. Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = g(x)e^{-ax}$. La fonction h produit de fonctions dérivables est dérivable et :
 $h'(x) = g'(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax} = ag(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax} = 0$. Or $g'(x) = 0 \Rightarrow g = K$ avec $K \in \mathbb{R}$. h est une fonction constante.
- c. Toute fonction solution de $y' = ay$ est de la forme $h(x) = g(x)e^{-ax} = K \Leftrightarrow g(x) = Ke^{ax}$. Donc toute solution de l'équation $y' = ay$ s'écrit Ke^{ax} , avec $K \in \mathbb{R}$.

2. (E) : $y' = 2y + \cos x$.

- a. $f_0(x) = a \cos x + b \sin x$. f_0 somme de fonctions dérivables est dérivable et $f_0'(x) = -a \sin x + b \cos x$.

f_0 est solution de (E) si et seulement si :

$$f_0'(x) = 2f_0(x) + \cos x \Leftrightarrow -a \sin x + b \cos x = 2(a \cos x + b \sin x) + \cos x \Leftrightarrow (a + 2b) \sin x + (2a - b + 1) \cos x = 0 \text{ quel que soit } x \text{ réel.}$$

En particulier pour $x = 0$ et pour $x = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} 2a - b + 1 = 0 \\ a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b = -1 \\ a = -2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5b = -1 \\ a = -2b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{5} \\ a = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

Conclusion : $f_0(x) = -\frac{2}{5} \sin x + \frac{1}{5} \cos x$.

- b. D'après 1. a. toute solution de l'équation différentielle $(E_0) : y' = 2y$ est de la forme $f(x) = e^{2x}$.
- c. Si f est solution de (E) et comme f_0 est aussi solution de (E), on a :

$$\begin{cases} f'(x) = 2f(x) + \cos x \\ f_0'(x) = 2f_0(x) + \cos x \end{cases}$$

D'où par différence membres à membres $f'(x) - f_0'(x) = 2(f(x) - f_0(x)) = 0$ ou par linéarité de la dérivabilité : $(f(x) - f_0(x))' = 2(f(x) - f_0(x))$ ce qui signifie que $f(x) - f_0(x)$ est solution de (E_0) .

- d. D'après 2. b., on a donc $f(x) - f_0(x) = Ke^{2x} \Leftrightarrow f(x) = -\frac{2}{5} \sin x + \frac{1}{5} \cos x + Ke^{2x}$.

- e. k est solution de (E), donc $k(x) = -\frac{2}{5} \sin x + \frac{1}{5} \cos x + Ke^{2x}$. Or $k\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow k\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{5} + Ke^{\pi} \Leftrightarrow K = \frac{2}{5}e^{-\pi}$.

On a donc $k(x) = -\frac{2}{5} \sin x + \frac{1}{5} \cos x + \frac{2}{5}e^{2x-\pi}$.

EXERCICE 2
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

5 points

1. L'écriture complexe d'une symétrie axiale (antidépacement) est de la forme $z' = a\bar{z} + b$. A et B invariants par cette symétrie se traduit par :

$$\begin{cases} 1 &= a \times 1 + b \\ i &= a \times (-i) + b \end{cases} \iff \begin{cases} 1 &= a + b \\ i &= -a(i) + b \end{cases} \iff \begin{cases} 1 &= a + b \\ 1 - i &= a(1 + i) \end{cases} \iff$$

$$\text{(par différence)} \begin{cases} \frac{1-i}{1+i} &= a \\ 1 &= a + b \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{-2i}{2} &= a \\ 1 &= a + b \end{cases} \iff \begin{cases} -i &= a \\ 1 + i &= b \end{cases}$$

L'écriture complexe est donc : $z' = -i\bar{z} + 1 + i$.

2. $f = H \circ S$.

a. La réflexion S est une similitude de centre A ; donc la composée de deux similitudes de même centre est une similitude de même centre A.

b. Écriture complexe :

– pour S , on a vu que l'écriture complexe est : $z' = -i\bar{z} + 1 + i$.

– pour $H : \overrightarrow{AM''} = -2\overrightarrow{AM'}$ $\iff z'' - 1 = -2(z' - 1) \iff z'' = 1 - 2(z' - 1) = -2z' + 3$

– donc $z'' = -2(-i\bar{z} + 1 + i) + 3 = 2i\bar{z} + 1 - 2i$.

Soit $M(z)$ tel que $\overrightarrow{AM''} = -2\overrightarrow{AM}$ $\iff z'' - 1 = -2(z - 1) \iff 2i\bar{z} + 1 - 2i - 1 = -2z + 2 \iff 2i\bar{z} + 2z = 1 + 2i$. (1)

$$\text{En posant } z = x + iy, 2i(x - iy) + 2(x + iy) = 1 + 2i \implies \begin{cases} 2y + 2x &= 2 \\ 2x + 2y &= 2 \end{cases}$$

Les points $M(x; y)$ qui vérifient la relation sont tels que $x + y = 1$ qui est l'équation de la droite (AB).

Inversement un point M de la droite (AB) a pour image par S M' et ensuite on a bien par la transformation h $\overrightarrow{AM''} = -2\overrightarrow{AM}$.

L'ensemble cherché est donc toute la droite (AB).

- c. De même $\overrightarrow{AM''} = 2\overrightarrow{AM}$ $\iff z'' - 1 = 2(z - 1) \iff 2i\bar{z} + 1 - 2i = 2z - 2 \iff 2i\bar{z} - 2z = -3 + 2i$ (2).

$$\text{Si } M(x; y), \text{ alors (2)} \implies \begin{cases} 2y - 2x &= -2 \\ 2x - 2y &= 2 \end{cases}$$

Les points $M(x; y)$ sont tels que $x - y = 1$ qui est l'équation d'une droite perpendiculaire à (AB) (coefficient directeur 1, alors que celui de (AB) est -1), et qui contient le point A (le couple $(1; 0)$ vérifie l'équation).

Inversement un point M de la perpendiculaire trouvée a pour coordonnées $(x; x - 1)$.

On vérifie que $z'' - 1 = 2ix + 2x - 2 - 2i$ et que

$$2(z - 1) = 2ix + 2x - 2 - 2i.$$

L'ensemble cherché est donc toute la perpendiculaire à (AB) contenant A.

EXERCICE 2
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

5 points

1. $z_{E'} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i + \frac{1}{-i} \\ -i + \frac{1}{-i} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i + \frac{i}{1} \\ -i + \frac{i}{1} \end{pmatrix} = 0$.

E a donc pour image O.

2. $M' = M \iff z = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \iff 2z^2 = z^2 + 1 \iff z^2 = 1 \iff z = 1 \text{ ou } z = -1$.

Les points égaux à leur image sont donc les points d'affixe 1 et -1 .

3. Soit $M(z)$ avec $z \neq 0$, $z \neq 1$, $z \neq -1$.

a.
$$\frac{z'+1}{z'-1} = \frac{\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})+1}{\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})-1} = \frac{z+\frac{1}{z}+2}{z+\frac{1}{z}-2} = \frac{z^2+1+2z}{z^2+1-2z} = \frac{(z+1)^2}{(z-1)^2} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2.$$

b.
$$\frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 \Rightarrow \left|\frac{z'+1}{z'-1}\right| = \left|\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2\right| \Leftrightarrow \frac{|z'+1|}{|z'-1|} = \frac{|(z+1)^2|}{|(z-1)^2|} \Leftrightarrow \frac{M'B}{M'A} = \left(\frac{MB}{MA}\right)^2.$$

De même avec les arguments :

$$\frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 \Rightarrow (\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{BM'}) = 2(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) \Leftrightarrow (\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}).$$

4. $M \in \Delta \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow \frac{MB}{MA} = 1$. Donc d'après la question précédente :

$$\frac{M'B}{M'A} = 1 \Leftrightarrow M'B = M'A \Leftrightarrow M' \in \Delta.$$

5. a. Si M appartient au cercle de diamètre $[AB]$, alors $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

Donc d'après la question précédente $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}) = \pi$, donc les points A, B et M' sont alignés ou encore $M' \in (AB)$.

b. Un point M' de la droite a une affixe $z' = a$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Il faut donc résoudre l'équation d'inconnue $z : a = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \Leftrightarrow$

$$2az = z^2 + 1 \Leftrightarrow z^2 - 2az + 1 = 0.$$

On a $\Delta = 4a^2 - 4 = 4(a^2 - 1)$.

Cette équation a deux solutions $z_1 = a + \sqrt{a^2 - 1}$ et $z_2 = a - \sqrt{a^2 - 1}$.

Conclusion : tout point (sauf O) de la droite (AB) a au moins un antécédent par f .

EXERCICE 3

5 points

Commun à tous les candidats

1. $M(x; y) \in (d) \Leftrightarrow$ il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x - (-2) = t \times 1 \\ y - 8 = t \times 5 \\ z - 4 = t \times (-1) \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 8 + 5t \\ z = 4 - t \end{cases}$$

2. Les plans (P) et (Q) ont respectivement pour vecteur normal $(1; -1; -1)$ et $(1; 0; -2)$ qui ne sont manifestement pas colinéaires. Ces deux plans n'étant pas parallèles sont sécants. Tout point $M(x; y; z)$ de leur droite commune vérifie :

$$\begin{cases} x - y - z = 7 \\ x - 2z = 11 \end{cases}, \text{ soit en posant } z = t, \begin{cases} x - y - t = 7 \\ x - 2t = 11 \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x - y = 7 + t \\ x = 11 + 2t \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 + 2t \\ y = 4 + t \\ z = t \end{cases} \text{ qui est une représentation paramétrique de la droite } (d').$$

3. $H(-3; 3; 5) \in (d) \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = -2 + t \\ 3 = 8 + 5t \\ 5 = 4 - t \end{cases}$ qui a une solution évidente $t = -1$.

$H'(3; 0; -4) \in (d') \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 11 + 2t \\ 0 = 4 + t \\ -4 = t \end{cases}$ qui a pour solution évidente $t = -4$.

4. On a $\overrightarrow{HH'}(6; -3; -9)$. Or $\overrightarrow{HH'} \cdot \vec{u} = 6 \times 1 - 3 \times 5 - 9 \times (-1) = 6 - 15 + 9 = 0$. Donc (HH') et (d) sont perpendiculaires;
 La droite (d') a un vecteur directeur $\vec{v}(2; 1; 1)$ et $\overrightarrow{HH'} \cdot \vec{v} = 6 \times 2 - 3 \times 1 - 9 \times 1 = 12 - 3 - 9 = 0$. Donc (HH') et (d') sont perpendiculaires.
5. La droite (HH') est la perpendiculaire commune aux droites (d) et (d') . La distance HH' est la plus courte distance entre les droites (d) et (d') .
 $HH'^2 = (3+3)^2 + (-3)^2 + (-4-5)^2 = 36 + 9 + 81 = 126$.
 D'où $HH' = \sqrt{126} = \sqrt{9 \times 14} = 3\sqrt{14}$.
6. $M(x; y; z)$ vérifie $\overrightarrow{MH'} \cdot \overrightarrow{HH'} = 126 \iff (3-x) \times 6 + (0-y) \times (-3) + (-4-z) \times (-9) = 126 \iff$ (en simplifiant par 3), $2(3-x) + y + 3(4+z) = 42 \iff$
 $6 - 2x + y + 12 + 3z = 42 \iff -2x + y + 3z = 24$ qui est l'équation d'un plan contenant H, puisque $\overrightarrow{HH'} \cdot \overrightarrow{HH'} = 126$ (question précédente).

EXERCICE 4

6 points

Commun à tous les candidats

1. a. $f_1(x) = 2x - 2 + \ln(x^2 + 1)$. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 1 = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 2$. Finalement par somme des limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = +\infty$.
- b. f_1 est une somme de fonctions dérivables et $f_1'(x) = 2 + \frac{2x}{x^2 + 1}$.
- c. On a $2x \geq 0$, $x^2 + 1 > 0$, donc $\frac{2x}{x^2 + 1}$, et donc $f_1' \geq 2 > 0$.
 La fonction est donc croissante sur $[0; +\infty[$.
 $f_1(0) = -2$. D'où le tableau de variation :

x	0	α_1	$+\infty$
$f_1'(x)$		 + 	
$f_1(x)$	-2	0	$+\infty$

2. $f_n(x) = 2x - 2 + \frac{\ln(x^2 + 1)}{n}$.
- a. Pour n fixé, on a encore $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{n} = +\infty$, et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$.
- b. $f_n'(x) = 2 + \frac{2x}{n(x^2 + 1)}$.
 Comme à la question 1, tous les termes sont positifs, donc $f_n'(x) > 0$. La fonction f_n est donc croissante sur $[0; +\infty[$.
- c. La fonction f_n est continue sur $[0; +\infty[$. Comme $f(0) = -2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$ il existe un réel unique α_n tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.
- d. On a $f_n(1) = \frac{\ln 2}{n}$.
 On a donc $-2 < 0 < 1$ ou encore $f_n(0) < f_n(\alpha_n) < f_n(1)$ d'où par croissance de la fonction f_n , $0 < \alpha_n < 1$.
3. On a : $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 2\alpha_{n+1} - 2 + \frac{\ln(\alpha_{n+1}^2 + 1)}{n+1}$
 D'autre part :

$$f_n(\alpha_{n+1}) = 2\alpha_{n+1} - 2 + \frac{\ln(\alpha_{n+1}^2 + 1)}{n}.$$

Ainsi :

$$f_n(\alpha_{n+1}) - f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = \ln(\alpha_{n+1}^2 + 1) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \ln(\alpha_{n+1}^2 + 1) \frac{1}{n(n+1)}.$$

De plus :

$$\ln(\alpha_{n+1}^2 + 1) > 0 \text{ car } \alpha_n > 0 \text{ pour tout entier } n \text{ et donc } \alpha_{n+1}^2 + 1 > 1$$

$$\text{et } \frac{1}{n(n+1)} > 0.$$

On en déduit que $f_n(\alpha_{n+1}) - f_{n+1}(\alpha_{n+1}) > 0$.

Or $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$ donc $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$.

a. On vient de démontrer que $0 < f_n(\alpha_{n+1})$ ou encore $f_n(\alpha_n) < f_n(\alpha_{n+1})$.

D'où par croissance de la fonction f_n , $\alpha_n < \alpha_{n+1}$.

Conclusion la suite (α_n) est donc croissante.

b. La suite est croissante et majorée par 1 : elle donc convergente vers une limite ℓ .

c. $\alpha_n = 1 - \frac{\ln(\alpha_n^2 + 1)}{2n}$ entraîne par limite au voisinage de plus l'infini que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\alpha_n^2 + 1)}{2n} = 0, \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 1.$$